ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (GRUPO A)
CURSO 2015-2016
HOJA 6

1. Transforma las siguientes ecuaciones diferenciales o sistemas en un sistema equivalente de ecuaciones diferenciales de primer orden:

a) $y'' + 3y' + 7y = x^2$

b) $y^{(4)} + 6y'' - 3y' + y = \cos 3x$

c) $\begin{cases} x'' - 5x + 4y = 0 \\ y'' + 4x - 5y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x'' = 3x - y + 2z \\ y'' = x + y - 4z \\ z'' = 5x - y - z \end{cases}$

2. Expresa en forma matricial el sistema de ecuaciones diferenciales asociado a la ecuación

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

3. Resuelve los sistemas de ecuaciones diferenciales siguientes por el método de eliminación:

a) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

c) $\begin{cases} x' = 4x + 2y + 2t \\ y' = -2x + y \end{cases}$

d) $\begin{cases} x' = 2x - 3y + 2\,\mathrm{sen}\, 2t \\ y' = x - 2y - \cos 2t \end{cases}$

4. Demuestra que $\left\{ \left(e^{2t}, -e^{2t}\right), \left(te^{2t}, (1-t)e^{2t}\right) \right\}$ y $\left\{ \left((t+1)e^{2t}, -te^{2t}\right), \left(te^{2t}, (1-t)e^{2t}\right) \right\}$ son dos conjuntos fundamentales de soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

5. Dadas las funciones vectoriales $\mathbf{x} = (t, 1)$ e $\mathbf{y} = (t^2, 2t)$:

a) Calcula su wronskiano.
b) ¿En qué intervalos son linealmente independientes?
c) ¿Qué conclusión puede formularse acerca de los coeficientes del sistema homogéneo satisfecho por ellas?
d) Encuentra dicho sistema y verifica las conclusiones del apartado anterior.

6. Contesta a las mismas preguntas del ejercicio anterior para las funciones vectoriales $\mathbf{x} = (t^2, 2t)$ e $\mathbf{y} = (e^t, e^t)$.

7. Halla la solución general del sistema homogéneo $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ en los siguientes casos:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

f) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

g) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

h) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

8. Resuelve el sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

con la condición inicial $\mathbf{y}(0) = (2, 3, 4)$.

9. Integra el sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

10. Calcula $e^{\mathbf{A}x}$ en los siguientes casos:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

11. Resuelve los sistemas no homogéneos siguientes:

a) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t + \cos t \\ \operatorname{sen} t - \cos t \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4t + 1 \\ \frac{3}{2}t^2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 14 \\ 4 & 3 & -8 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

12. Integra los sistemas no homogéneos siguientes con las condiciones iniciales indicadas:

a) $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x \\ \cos x \end{pmatrix}, \ \mathbf{y}(0) = (0, 0)$

b) $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{5x} \\ e^{5x} \end{pmatrix}, \ \mathbf{y}(0) = (0, 0)$

c) $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -7 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix}, \ \mathbf{y}(0) = (1, 1, 1)$

d) $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^x \cos 2x \end{pmatrix}, \ \mathbf{y}(0) = (0, 1, 1)$